e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 3

Filière PC

durée 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants .

Problème A

Si $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

Un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est noté $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^p$, rapporté à sa base canonique , et sa matrice dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont notés par la même lettre .

Si N est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, la suite $(A_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ admet une limite B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite réelle $(N(A_n - B))_n$ a pour limite 0 .

On note :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = B \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} N(A_n - B) = 0 \ .$$

Les coefficients de la matrice limite B sont les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I.

On admettra que l'application , notée $\| \ \|$, de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \ , \ \|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, adoptée dans la suite du problème et telle que , $\forall r \in \mathbb{N}^*$ (avec un abus d'écriture évident) :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \ , \ \forall B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \ , \ \ \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \ .$$

1) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, et $\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |\lambda_i|$.

Montrer que :

$$\forall i \in [1,p]_{\mathbb{N}},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\lambda_i|^k \leqslant \left\|A^k\right\| .$$

En déduire que si A est diagonalisable alors :

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = O \iff \rho(A) < 1$$

(O désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

2) $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, A inversible .

On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.

L'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.

On définit une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left(x^{(n)}\right)_n$, où $n \in \mathbb{N}$ par :

$$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad , x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b .$$

a) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N , $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(x^{(n)}\right)_n$ converge vers x .

Partie II.

On donne la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} \forall i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p\ ,\ \ a_{i,i} = 2\ ; \\ \forall i,\ 2 \leqslant i \leqslant p\ ,\ \ a_{i,i-1} = -1\ ; \\ \forall i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p-1\ ,\ \ a_{i,i+1} = -1\ ; \end{cases}$$

tous les autres coefficients étant nuls.

1) I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, trouver une relation entre D_p , D_{p-1} , D_{p-2} et λ .

On prendra $D_0 = 1$ et $D_1 = 2 - \lambda$.

2) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A.

Montrer que $|\lambda - 2| \leqslant 2$ à l'aide de $\|A - 2I_p\|$.

3) On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Calculer D_p en fonction de p et de θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

En déduire les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

Partie III.

Dans la décomposition $A = M - N$ donnée au **I 2)**, A est la matrice du **II** et l'on pose $M = 2I_p$, d'où $N = 2I_p - A$ où I_p désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $J = M^{-1}N$, $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On reprend la méthode itérative de **I 2)**.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter la matrice $x^{(n+1)}$ en fonction de la matrice $x^{(n)}$ et de la matrice b. Préciser tous ses éléments.

2) Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$, ρ ayant été défini au **I 1)**. La suite $\left(x^{(n)}\right)_n$ est-elle convergente ?

3) Montrer que :

$$1 - \rho(J) \leqslant \frac{\pi^2}{2p^2}.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas ?

Problème B

Partie I.

1) Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On note f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}.$$

Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant 1 - \cos(yt) \leqslant |y|\,t$ et en déduire que :

$$\forall t > 0, \quad |f(t)| \leqslant \frac{\left|e^{(x-1)t} - 1\right|}{t} + |y|.$$

3) Soit $x > 0$; $\forall y \in \mathbb{R}$ on note :

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t} dt$$

et F_x l'application :

$$F_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & F(x, y) \end{array}.$$

a) Montrer que F_x est continue sur $\mathbb{R}$ (On pourra distinguer $t > 1$ et $t < 1$). On énoncera avec grande précision le théorème utilisé.

b) Montrer que F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_x'(y)$.

c) Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) dt = \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En déduire $F_x(0)$ puis $F(x, y)$.

Partie II.

1) a) Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Montrer l'existence de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\cos(yt)}{t} dt ,$$

puis celle de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt .$$

On pose encore :

$$F(0,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt .$$

b) Soit $y > 0$ et $z > 0$. Montrer que l'application h de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t > 0 , \quad h(t) = e^{-tz} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Dans la suite $y > 0$.

c) Montrer l'existence de :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt .$$

On note H l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall z \in]0,+\infty[, \; H(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt \qquad \text{et} \qquad H(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt.$$

2) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer $\lim_{z\to+\infty} H(z)$.

4) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire la valeur de $H(z)$ pour $z > 0$.

5) Pour $t \geqslant 0$ on pose :

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{y}} - \cos u}{u} du .$$

a) Montrer que $\forall z > 0$ l'application $t \longmapsto e^{-tz}\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$H(z) = H(0) - z \int_0^{+\infty} e^{-tz}\varphi(t)\, dt .$$

b) En déduire que H est continue en 0 (on pourra remarquer que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$) .

6) Calculer $F(0,y)$ pour $y \in \mathbb{R}^*$.